ガウスの法則を満たす磁場分布の求め方

　電磁流体力学の数値計算において，コイルや永久磁石がつくる磁場分布を数値的に求める必要がある．コイルに電流が流れる場合では，Biot-Savart の法則に則って数値積分により，空間に張られた格子点上において磁場ベクトルが確かに求められる．しかしながら，数値的に得られた磁場分布が，必ずしも発散ゼロの場（div $\boldsymbol{B}$ = 0）を高精度に満たしているとは限らない．本稿では，Biot-Savart の法則から得られた数値データを少し修正して，div $\boldsymbol{B}$ = 0 を満たすようにすることを考える．

まず，Biot-Savart の法則から得られた磁場ベクトルを $\vec{B}_{Biot}$ とする．前述のように，この発散は必ずしも精度よく div $\boldsymbol{B}$ = 0 を満たすとは限らない．そこで次式のように，スカラポテンシャル φ を導入する．

$$\vec{B} = \vec{B}_{Biot} - \vec{\nabla}\varphi \tag{1}$$

ここで，$\vec{B}$ は div $\boldsymbol{B}$ = 0 を満たす真の磁場ベクトルとする．実際，式(1)の発散をとると，

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \vec{\nabla}\cdot\vec{B}_{Biot} - \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\varphi = 0 \tag{2}$$

となるので，次の Poisson 方程式

$$\nabla^2\varphi = \vec{\nabla}\cdot\vec{B}_{Biot} \tag{3}$$

を数値的に解いて，φ を求める．これを式(1)に代入し，真の磁場ベクトルを得ることができる．ちなみに，式(1)の両辺について回転をとると，

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{B}_{Biot} - \underbrace{\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\varphi\right)}_{\vec{0}} \tag{4}$$

であるから, Biot-Savart の法則から得られた磁場分布にスカラポテンシャルの勾配を加えても影響はない.

Poisson 方程式の数値解法

二次元デカルト座標系に対して，式(3)の数値解法についてまとめる．ただし，磁場ベクトル $\vec{B}_{Biot}$ の成分を U, V とし，m は反復回数を表すものとする．

＜Jacobi 法＞

$$\varphi_{i,j}^{m+1} = \frac{\dfrac{\varphi_{i+1,j}^{m} + \varphi_{i-1,j}^{m}}{(\Delta x)^2} + \dfrac{\varphi_{i,j+1}^{m} + \varphi_{i,j-1}^{m}}{(\Delta y)^2} - \left(\dfrac{U_{i+,j} - U_{i-,j}}{\Delta x} + \dfrac{V_{i,j+} - V_{i,j-}}{\Delta y}\right)}{2\left(\dfrac{1}{(\Delta x)^2} + \dfrac{1}{(\Delta y)^2}\right)} \tag{5}$$

＜Gauss-Seidel 法＞　更新された値を直ちに使う.

$$\varphi_{i,j}^{m+1}=\frac{\dfrac{\varphi_{i+1,j}^{m}+\varphi_{i-1,j}^{m+1}}{(\Delta x)^2}+\dfrac{\varphi_{i,j+1}^{m}+\varphi_{i,j-1}^{m+1}}{(\Delta y)^2}-\left(\dfrac{U_{i+,j}-U_{i-,j}}{\Delta x}+\dfrac{V_{i,j+}-V_{i,j-}}{\Delta y}\right)}{2\left(\dfrac{1}{(\Delta x)^2}+\dfrac{1}{(\Delta y)^2}\right)} \tag{6}$$

あるいは，

$$\varphi_{i,j}^{m+1}=\varphi_{i,j}^{m}+\frac{\dfrac{\varphi_{i+1,j}^{m}-2\varphi_{i,j}^{m}+\varphi_{i-1,j}^{m+1}}{(\Delta x)^2}+\dfrac{\varphi_{i,j+1}^{m}-2\varphi_{i,j}^{m}+\varphi_{i,j-1}^{m+1}}{(\Delta y)^2}-\left(\dfrac{U_{i+,j}-U_{i-,j}}{\Delta x}+\dfrac{V_{i,j+}-V_{i,j-}}{\Delta y}\right)}{2\left(\dfrac{1}{(\Delta x)^2}+\dfrac{1}{(\Delta y)^2}\right)} \tag{7}$$

＜SOR 法＞　加速係数 ω を導入する．

$$\varphi_{i,j}^{m+1}=\varphi_{i,j}^{m}+\omega\frac{\dfrac{\varphi_{i+1,j}^{m}-2\varphi_{i,j}^{m}+\varphi_{i-1,j}^{m+1}}{(\Delta x)^2}+\dfrac{\varphi_{i,j+1}^{m}-2\varphi_{i,j}^{m}+\varphi_{i,j-1}^{m+1}}{(\Delta y)^2}-\left(\dfrac{U_{i+,j}-U_{i-,j}}{\Delta x}+\dfrac{V_{i,j+}-V_{i,j-}}{\Delta y}\right)}{2\left(\dfrac{1}{(\Delta x)^2}+\dfrac{1}{(\Delta y)^2}\right)} \tag{8}$$

＜Newton 法＞

まず次式のように置く．

$$f\left(\varphi_{i,j}\right)=\frac{\varphi_{i+1,j}-2\varphi_{i,j}+\varphi_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}+\frac{\varphi_{i,j+1}-2\varphi_{i,j}+\varphi_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}-\left(\frac{U_{i+,j}-U_{i-,j}}{\Delta x}+\frac{V_{i,j+}-V_{i,j-}}{\Delta y}\right)=(err)_{i,j}\cong 0$$

上式の偏微分をとれば，

$$\frac{\partial f\left(\varphi_{i,j}\right)}{\partial\varphi_{i,j}}=f'\left(\varphi_{i,j}^{m}\right)=-2\left(\frac{1}{(\Delta x)^2}+\frac{1}{(\Delta y)^2}\right)$$

となるので，結局，次の反復式が得られる．

$$\varphi_{i,j}^{m+1}=\varphi_{i,j}^{m}-\frac{f\left(\varphi_{i,j}^{m}\right)}{f'\left(\varphi_{i,j}^{m}\right)}=\varphi_{i,j}^{m}+\frac{(err)_{i,j}^{m}}{2\left(\dfrac{1}{(\Delta x)^2}+\dfrac{1}{(\Delta y)^2}\right)}=\varphi_{i,j}^{m}+(\delta\varphi)_{i,j}^{m} \tag{9}$$

いずれの手法も本質的には同じことをしている．ガウス・ザイデルの考え方（最新の値を使って隣接点を計算）と加速係数の導入が収束を早めることになる．

＜HSMAC 法＞

ここまでは，Poisson 方程式を解くことに焦点を当てたが，ここでは HSMAC 法的な考え方にならい，式(1)を利用し，div $\boldsymbol{B}=0$ を満たすように，反復計算させることを考える．用いる式は，次の２つである．

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \tag{10}$$

$$\vec{B}=-\vec{\nabla}\varphi+\vec{B}_{Biot} \tag{11}$$

まず，式(11)を 2 段階に分離する．上付き p は予測値であり，上付き c は修正値（真の値）とする．

$$\begin{cases} \vec{B}^p = -\vec{\nabla}\varphi^p + \vec{B}_{Biot} \\ \vec{B}^c = \vec{B}^p - \vec{\nabla}\left(\varphi^c - \varphi^p\right) = \vec{B}^p - \vec{\nabla}\left(\delta\varphi\right) \end{cases} \tag{12ab}$$

式(10)については，

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}^c = 0 \tag{13}$$

としておく．

式(12a)より，予測値は次式のようにして得られる．

$$B^p_{X\,i+,j} = -\frac{\varphi^p_{i+1,j} - \varphi^p_{i,j}}{\Delta x} + U_{i+,j}, \quad B^p_{Y\,i,j+} = -\frac{\varphi^p_{i,j+1} - \varphi^p_{i,j}}{\Delta y} + V_{i,j+} \tag{14}$$

一方，式(12b)の発散をとり，

$$\nabla^2\left(\delta\varphi\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{B}^p \tag{15}$$

これを成分表示して，

$$\frac{\partial^2\left(\delta\varphi\right)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\left(\delta\varphi\right)}{\partial y^2} = \frac{\partial B^p_X}{\partial x} + \frac{\partial B^p_Y}{\partial y} \tag{16}$$

さらに，差分式で書けば

$$\begin{aligned} &\frac{\left(\delta\varphi\right)_{i+1,j} - 2\left(\delta\varphi\right)_{i,j} + \left(\delta\varphi\right)_{i-1,j}}{\left(\Delta x\right)^2} + \frac{\left(\delta\varphi\right)_{i,j+1} - 2\left(\delta\varphi\right)_{i,j} + \left(\delta\varphi\right)_{i,j-1}}{\left(\Delta y\right)^2} \\ &\qquad = \frac{B^p_{X\,i+,j} - B^p_{X\,i-,j}}{\Delta x} + \frac{B^p_{Y\,i,j+} - B^p_{Y\,i,j-}}{\Delta y} \end{aligned} \tag{17}$$

式(17)は，SMAC 法において現れるポテンシャルの修正量に対する Poisson 方程式であり，連立方程式になっている．これを何らかの方法を用いて解き，ポテンシャルの修正量が得られれば，式(12b)より発散ゼロの磁場が得られる．

一方で，HSMAC 法においては，式(17)において非対角成分を無視し，ポテンシャルの修正量を求める．

$$\left(\delta\varphi\right)_{i,j} = -\frac{\dfrac{B^p_{X\,i+,j} - B^p_{X\,i-,j}}{\Delta x} + \dfrac{B^p_{Y\,i,j+} - B^p_{Y\,i,j-}}{\Delta y}}{2\left(\dfrac{1}{\left(\Delta x\right)^2} + \dfrac{1}{\left(\Delta y\right)^2}\right)} = \varphi^c_{i,j} - \varphi^p_{i,j} \tag{18}$$

これを少し書き換えることにより，ポテンシャル値は，次式の反復計算から得られる．

$$\varphi^c_{i,j} = \varphi^p_{i,j} + \left(\delta\varphi\right)_{i,j} = \varphi^p_{i,j} - \frac{\dfrac{B^p_{X\,i+,j} - B^p_{X\,i-,j}}{\Delta x} + \dfrac{B^p_{Y\,i,j+} - B^p_{Y\,i,j-}}{\Delta y}}{2\left\{\left(\Delta x\right)^{-2} + \left(\Delta y\right)^{-2}\right\}} \tag{19}$$

式(19)を反復して用いるとき，それが収束するためには，修正量がゼロに近づかなくてはならない．した

がって，磁場の発散（修正項の分子）がゼロに近づいていく必要があり，磁場そのものも修正していく必要がある．磁場の反復修正式は，式(12b)から

$$B_{X\,i+,j}^{\,c} = B_{X\,i+,j}^{\,p} + \frac{(\delta\varphi)_{i,j}}{\Delta x}, \quad B_{X\,i-,j}^{\,c} = B_{X\,i-,j}^{\,p} - \frac{(\delta\varphi)_{i,j}}{\Delta x},$$
$$B_{Y\,i,j+}^{\,c} = B_{Y\,i,j+}^{\,p} + \frac{(\delta\varphi)_{i,j}}{\Delta y}, \quad B_{Y\,i,j-}^{\,c} = B_{Y\,i,j-}^{\,p} - \frac{(\delta\varphi)_{i,j}}{\Delta y} \tag{20}$$

となる．

まとめると，式(21)より磁場の予測値（$m=1$ に対応）を求め，式(22)と(23)によりポテンシャルと磁場を同時修正し，収束するまで反復する．m は反復回数を表す．

$$B_{X\,i+,j}^{1} = -\frac{\varphi_{i+1,j}^{1} - \varphi_{i,j}^{1}}{\Delta x} + U_{i+,j}, \quad B_{Y\,i,j+}^{1} = -\frac{\varphi_{i,j+1}^{1} - \varphi_{i,j}^{1}}{\Delta y} + V_{i,j+} \tag{21}$$

$$\varphi_{i,j}^{m+1} = \varphi_{i,j}^{m} + (\delta\varphi)_{i,j}^{m} = \varphi_{i,j}^{m} - \frac{\dfrac{B_{X\,i+,j}^{m} - B_{X\,i-,j}^{m}}{\Delta x} + \dfrac{B_{Y\,i,j+}^{m} - B_{Y\,i,j-}^{m}}{\Delta y}}{2\left\{(\Delta x)^{-2} + (\Delta y)^{-2}\right\}} \tag{22}$$

$$B_{X\,i+,j}^{\,m+1} = B_{X\,i+,j}^{\,m} + \frac{(\delta\varphi)_{i,j}^{m}}{\Delta x}, \quad B_{X\,i-,j}^{\,m+1} = B_{X\,i-,j}^{\,m} - \frac{(\delta\varphi)_{i,j}^{m}}{\Delta x},$$
$$B_{Y\,i,j+}^{\,m+1} = B_{Y\,i,j+}^{\,m} + \frac{(\delta\varphi)_{i,j}^{m}}{\Delta y}, \quad B_{Y\,i,j-}^{\,m+1} = B_{Y\,i,j-}^{\,m} - \frac{(\delta\varphi)_{i,j}^{m}}{\Delta y} \tag{23}$$

一見すると，他の Poisson 方程式を反復計算する手法よりも複雑に見えるが，HSMAC 法の利点はスカラポテンシャルと磁場ベクトルが同時に得られる点である．式(1)の操作は不要となる．

<u>誘導方程式の数値解法</u>

非圧縮流れを仮定できるときの誘導磁場解析では，次の 2 式を満たすような解（磁場分布）を得る必要がある．

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B} + \left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u} + \nu_m \nabla^2 \vec{B} \tag{24}$$

基本的な考え方として，磁場ベクトル（仮の値）が求まった後に，

$$\vec{B} = \vec{B}^{*} - \vec{\nabla}\varphi \tag{25}$$

と修正すれば，ガウスの法則（磁荷不在の法則）を満たすと考えられる．式(24)に対して，陽解法を用いれば，次のように離散化される．

$$\vec{B}^{n+1} = \vec{B}^{n} + \Delta t\left\{-\left(\vec{u}^{n}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B}^{n} + \left(\vec{B}^{n}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u}^{n} + \nu_m \nabla^2 \vec{B}^{n}\right\}$$

ところが，このようにして得られた$\vec{B}^{n+1}$は，発散ゼロの条件を満たすとは限らないので，$\vec{B}^*$（仮の値）としておく．

$$\vec{B}^* = \vec{B}^n + \Delta t\left\{-\left(\vec{u}^n \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{B}^n + \left(\vec{B}^n \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{u}^n + \nu_m \nabla^2 \vec{B}^n\right\} \tag{26}$$

次に，式(25)を次式のように 2 段階に分離する．

$$\begin{cases} \vec{B}^p = -\vec{\nabla}\varphi^p + \vec{B}^* \\ \vec{B}^{n+1} = \vec{B}^p - \vec{\nabla}\left(\varphi^{n+1} - \varphi^p\right) = \vec{B}^p - \vec{\nabla}\left(\delta\varphi\right) \end{cases} \tag{27ab}$$

式(10)については，

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}^{n+1} = 0 \tag{28}$$

としておく．式(27), (28)は Biot-Savart の法則から得られた磁場を修正するのと同様な作業である．
式(26)と式(27a)を加えると，式(29)が得られる．

$$\vec{B}^p = \vec{B}^n - \vec{\nabla}\varphi^p + \Delta t\left\{-\left(\vec{u}^n \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{B}^n + \left(\vec{B}^n \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{u}^n + \nu_m \nabla^2 \vec{B}^n\right\} \tag{29}$$

これは，次式と同等である．

$$\frac{\vec{B}^p - \vec{B}^n}{\Delta t} = -\vec{\nabla}\underbrace{\left(\frac{\varphi}{\Delta t}\right)^p}_{\phi} + \left\{-\left(\vec{u}^n \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{B}^n + \left(\vec{B}^n \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{u}^n + \nu_m \nabla^2 \vec{B}^n\right\}$$

したがって，計算のアルゴリズムは，それぞれ以下のようになる．

＜SMAC 法＞

１． $\vec{B}^* = \vec{B}^n + \Delta t\left\{-\vec{\nabla}\phi^n - \left(\vec{u}^n \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{B}^n + \left(\vec{B}^n \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{u}^n + \nu_m \nabla^2 \vec{B}^n\right\}$により，磁場を予測する．

２． $\nabla^2\left(\delta\phi\right) = \dfrac{1}{\Delta t}\vec{\nabla} \cdot \vec{B}^*$を解いて，ポテンシャルの修正量を求める．

３． $\vec{B}^{n+1} = \vec{B}^* - \Delta t \cdot \vec{\nabla}\left(\delta\phi\right)$より，発散ゼロの磁場を得る．

＜HSMAC 法＞

１． $\vec{B}^* = \vec{B}^n + \Delta t\left\{-\vec{\nabla}\phi^n - \left(\vec{u}^n \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{B}^n + \left(\vec{B}^n \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{u}^n + \nu_m \nabla^2 \vec{B}^n\right\}$により，磁場を予測する．

２． $\phi_{i,j}^{m+1} = \phi_{i,j}^m + \left(\delta\phi\right)_{i,j}^m = \phi_{i,j}^m - \dfrac{\dfrac{B_{X\,i+,j}^m - B_{X\,i-,j}^m}{\Delta x} + \dfrac{B_{Y\,i,j+}^m - B_{Y\,i,j-}^m}{\Delta y}}{2\Delta t\left\{\left(\Delta x\right)^{-2} + \left(\Delta y\right)^{-2}\right\}}$および

$$B_{X\,i+,j}^{m+1} = B_{X\,i+,j}^{m} + \Delta t\frac{\left(\delta\phi\right)_{i,j}^m}{\Delta x},\quad B_{X\,i-,j}^{m+1} = B_{X\,i-,j}^{m} - \Delta t\frac{\left(\delta\phi\right)_{i,j}^m}{\Delta x},$$
$$B_{Y\,i,j+}^{m+1} = B_{Y\,i,j+}^{m} + \Delta t\frac{\left(\delta\phi\right)_{i,j}^m}{\Delta y},\quad B_{Y\,i,j-}^{m+1} = B_{Y\,i,j-}^{m} - \Delta t\frac{\left(\delta\phi\right)_{i,j}^m}{\Delta y}$$

により，ポテンシャルと磁場の同時修正を行い，収束したら$\phi_{i,j}^{n+1}, \vec{B}_{i,j}^{n+1}$が得られる．

結局は，ガウスの法則を満たす磁場分布を得るには，式(30)に示される，元の誘導方程式にポテンシャル（ϕとφとは時間分だけ単位が異なるので注意）の勾配を加えたもの

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \left(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{B} = -\vec{\nabla}\phi + \left(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{u} + \nu_m \nabla^2 \vec{B} \tag{30}$$

を式(10)とともに，SMAC 法あるいは HSMAC 法で解けば良いと思われる．